Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 7

Rzut ortogonalny

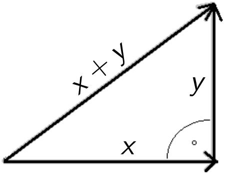
math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

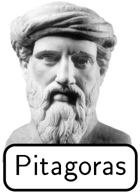
H – ustalona przestrzeń unitarna.

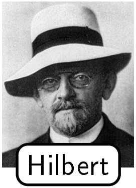
Def. Powiemy, że wektory $x, y \in H$ są do siebie **ortogonalne** (lub też **prostopadłe**), jeżeli $\langle x, y \rangle = 0$. Piszemy wtedy $x \perp y$.

Uw. $x \perp y \iff y \perp x$, oraz $\forall_{y \in H}\ x \perp y \iff x \perp x \iff x = 0$. 

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej!







[Twierdzenie Pitagorasa]

Jeśli $x \perp y$, to $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Dowód: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$

Uw. Jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to

$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Def. Dopełnieniem ortogonalnym zbioru $M \subseteq H$ nazywamy

$$M^{\perp} := \{x \in H : x \perp y \text{ dla każdego } y \in M\}.$$

Jeśli $x \in M^{\perp}$, to piszemy też $x \perp M$. Dla dwóch zbiorów $N, M \subseteq H$ piszemy $N \perp M$ jeżeli $n \perp m$ dla każdego $n \in N$ i $m \in M$.

Stw. $M^{\perp}$ jest domkniętą przestrzenią liniową.

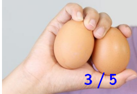
Dowód: Każdy $y \in H$ zadaje funkcjonał liniowy $f_y : H \to \mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$f_y(x) := \langle x, y \rangle, \qquad x \in H,$$

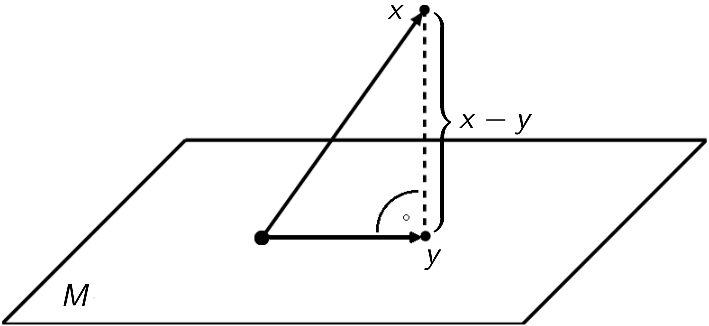
Z nierówności Schwartza $|f_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. Czyli f_y jest ograniczony oraz $\|f_y\| \leqslant \|y\|$ (de facto $\|f_y\| = \|y\|$). W szczególności f_y jest funkcją ciągłą. Stąd jądro $\ker f_y = f_y^{-1}(0) \subseteq H$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową. Skoro $M^{\perp}$ jest przekrojem takich jąder:

$$M^{\perp} = \{x \in H : f_y(x) = 0 \text{ dla każdego } y \in M\} = \bigcap_{y \in M} \ker f_y$$

to sam jest domkniętą poprzestrzenią liniową. ■



Def. Rzut ortogonalny wektora $x \in H$ na podprzestrzeń $M \subseteq H$ nazywamy wektor $y \in M$ taki, że $x - y \perp M$.



Piszemy wtedy $P_M x = y$. Czyli

$$P_M x = y \quad \overset{def}{\iff} \quad y \in M \forall_{z \in M} \ \langle x - y, z \rangle = 0.$$

Rzut ortogonalny $P_M x$ jest wyznaczony jednoznacznie!

Problem: Jak wykazać istnienie rzutu?

Prz. (Rzut ortogonalny na podprzestrzeń jednowymiarową)

Niech $M = \{\lambda y : \lambda \in \mathbb{F}\}$, gdzie $y \in H \setminus \{0\}$, i niech $x \in H$. Wtedy $P_M x = \lambda_0 y$, gdzie $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ takie, że $x - \lambda_0 y \perp M$. Ile wynosi λ_0?

$$\begin{aligned}
x - \lambda_0 y \perp M &\iff \forall_{z \in M} \ \langle x - \lambda_0 y, z\rangle = 0 \\
&\iff \forall_{\lambda \in \mathbb{F}} \ \langle x - \lambda_0 y, \lambda y\rangle = 0 \\
&\iff \forall_{\lambda \in \mathbb{F}} \ \overline{\lambda} \cdot \langle x - \lambda_0 y, y\rangle = 0 \\
&\iff \langle x - \lambda_0 y, y\rangle = 0 \iff \langle x, y\rangle - \lambda_0 \langle y, y\rangle = 0 \\
&\iff \lambda_0 = \tfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$P_M x = \lambda_0 y = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} y.$$

Czasem rzut ten nazywa się też **rzutem ortogonalnym** wektora x **na wektor** y i oznacza się przez $P_y x$.

Uw. Obliczając $\|x - P_y x\|$, czyli odległość x od podprzestrzeni $M = \{\lambda y : \lambda \in \mathbb{F}\}$, otrzymujemy dowód nierówności Schwartza.